Matemática y Lógica 2019

Guía 4: Cálculo de la lógica proposicional

Docente: Araceli Acosta

Cálculo Proposicional

Tomando ideas de E. W. Dijkstra, proponemos el uso de lo que llamamos calculational proofs. *Como resultado, el cálculo que presentamos nos permite demostrar teoremas y propiedades al estilo de un cálculo; como cuando despejamos una x para resolver una ecuación. La expresión de un teorema es en esencia una expresión booleana, y su prueba es en esencia calcular que esa expresión tiene valor verdadero. La forma más directa de "evaluar" una expresión booleana es someterla a una o varias transformaciones que preserven el valor de verdad hasta que alcancemos una formulación simplificada de la expresión, en el caso de un teorema: $True$. Continuando con la analogía de "despejar la x" en cada paso podemos, por ejemplo, sumar miembro a miembro una constante, y finalmente decimos que resolvimos la ecuación cuando llegamos a una expresión, equivalente a la original, que tiene una forma más simple, por ejemplo $x = 5$.*

Si en alguna oportunidad alguien nos pidiera que multipliquemos 179,347 por 9,325 y no contamos con alguna calculadora a mano, no dudaríamos en escribir un número debajo del otro y resolver el problema con el método que aprendimos en la escuela primaria. De la misma manera, contar con una buena notación y una forma ordenada de escritura, sumado a contar con una cálculo de tipo ecuacional que permite expresar las pruebas con una estructura lineal, extiende nuestra capacidad para razonar sobre los problemas.

- *Una demostración en el Cálculo Proposicional que veremos en este curso consiste en probar la* ***validez*** *de una fórmula mediante una serie de pasos justificados con* ***axiomas*** *y* ***teoremas*** *del Cálculo.*
- *Recordemos que una fórmula es válida si para toda asignación posible de las variables es equivalente a True;*
- *por lo tanto una demostración será una serie de fórmulas, equivalentes entre sí, donde la primera fórmula es la que queremos demostrar válida y la última es True.*

Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} & P \\ \equiv & \{\ \texttt{Razón 1}\ \} \\ & Q \\ \equiv & \{\ \texttt{Razón 2}\ \} \\ & (...) \\ \equiv & \{\ \texttt{Razón n}\ \} \\ & True \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & (\underline{\neg p \wedge s)}) \vee r \equiv r \vee (s \wedge \neg p) \\ \equiv & \{\ \textit{Conmutatividad de la conjunción}\ \} \\ & \underline{(s \wedge \neg p) \vee r} \equiv r \vee (s \wedge \neg p) \\ \equiv & \{\ \textit{Conmutatividad de la disyunción}\ \} \\ & \underline{r \vee (s \wedge \neg p) \equiv r \vee (s \wedge \neg p)} \\ \equiv & \{\ \textit{Reflexividad del equivalente}\ \} \\ & True \end{array}$$

La regla general de la izquierda, donde se quiere demostrar que la fórmula P es válida, se puede leer de la siguiente manera: Debido a la `Razón 1`*, P es equivalente a Q, y debido a la* `Razón 2`*, Q es equivalente a True. Por lo tanto, como el equivalente es transitivo, se concluye que P es equivalente a True.*

El ejemplo de la derecha primero aplica el teorema llamado conmutatividad de la conjunción ($P \wedge Q \equiv Q \wedge P$), luego la conmutatividad de la conjunción ($P \vee Q \equiv Q \vee P$) y finalmente la reflexividad del equivalente ($P \equiv P$).

Si la fórmula que se quiere demostrar es de la forma $R \equiv S$, para demostrar la validez de la fórmula podemos seguir la estrategia seguida anteriormente transformando la expresión completa en True, o bien partir de la subexpresión R y transformarla en la subexpresión S (o viceversa). En ambos casos, cada paso de "transformación" consiste en "reescribir" la expresión en cuestión (o una subexpresión) en otra equivalente dada por uno de los Axiomas o Teoremas básicos. A continuación escribimos las mismas pruebas explicadas anteriormente siguiendo esta nueva estrategia.

$$\begin{array}{ll} & R \\ \equiv & \{\ \texttt{Razón 1}\ \} \\ & T \\ \equiv & \{\ \texttt{Razón 2}\ \} \\ & (...) \\ \equiv & \{\ \texttt{Razón n}\ \} \\ & S \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & (\underline{\neg p \wedge s)}) \vee r \\ \equiv & \{\ \textit{Conmutatividad de la conjunción}\ \} \\ & \underline{(s \wedge \neg p) \vee r} \\ \equiv & \{\ \textit{Conmutatividad de la disyunción}\ \} \\ & \underline{r \vee (s \wedge \neg p)} \end{array}$$

Cada axioma o teorema nos habilita a reescribir una expresión de diversas maneras. Por ejemplo la Regla Dorada, cuya formulación es $P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$, nos permite reescribir la expresión $P \wedge Q$ por $P \equiv Q \equiv P \vee Q$, pero también:

$$\begin{array}{rll}
P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q & \text{por} & \mathit{True} \\
P \wedge Q \equiv P & \text{por} & Q \equiv P \vee Q \\
Q \equiv P \vee Q & \text{por} & P \wedge Q \equiv P \\
P \wedge Q \equiv P \vee Q & \text{por} & P \equiv Q \\
P \wedge Q \equiv Q \equiv P \vee Q & \text{por} & Q \\
P \equiv P \vee Q & \text{por} & P \wedge Q \equiv Q \\
\text{y demás combinaciones} \ldots & &
\end{array}$$

Gracias a la sustitución el lugar de las variables P, Q y R en un axioma o teorema puede ser ocupado por cualquier expresión booleana (de tipo Bool), ya sean fórmulas proposicionales, como p, $(p \wedge q)$, $(p \Rightarrow q \vee r)$, etc, o expresiones aritméticas booleanas como $(2 * 2 = 4)$, $(x \leqslant 0)$, etc.

Sustitución y Regla de Leibniz

Las herramientas que venimos usando para hacer demostraciones se llaman: la sustitución y la regla de Leibniz.

Leibniz fue quien introdujo la regla de que es posible reemplazar en una fórmula una expresión por otra expresión equivalente, sin que esto altere el significado de la fórmula. Los sistemas de ecuaciones hacen uso de la regla de Leibniz, por ejemplo

$$\begin{cases} x = 5 & (1) \\ y = x + 3 & (2) \end{cases} \xrightarrow{\text{Utilizo (1) en (2)}} \begin{cases} x = 5 & (1) \\ y = 5 + 3 & (2) \end{cases}$$

En este ejemplo, ambos sistemas de ecuaciones tienen el mismo significado porque el de la derecha reemplaza x por el valor al cual es equivalente en este sistema de ecuaciones, es decir, 5.

*En las demostraciones del Cálculo Proposicional se utiliza todo el tiempo la regla de Leibniz para "transformar" fórmulas. Por ejemplo, como $p \vee p \equiv p$ es una **instanciación** del axioma $P \vee P \equiv P$, se puede transformar la fórmula $p \wedge q$ a la fórmula $(p \vee p) \wedge q$ donde se reemplazó p por otra expresión equivalente, $p \vee p$.*

Propiedades de la Equivalencia y la Negación

A continuación se listan un conjunto de propiedades del equivalente y la negación. Notá que hacemos una distinción entre algunos, que identificamos como axiomas, y otros, que identificamos como teoremas, pero ambos son propiedades que sirven para trabajar con fórmulas booleanas.

Axioma 1 *Asociatividad equivalencia:* $((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$

Axioma 2 *Conmutatividad equivalencia:* $(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$

Axioma 3 *Neutro equivalencia:* $(P \equiv \mathit{True}) \equiv P$

Teorema 1 *Reflexividad equivalencia:* $P \equiv P$

Axioma 4 *Definición de False:* $\mathit{False} \equiv \neg \mathit{True}$

Axioma 5 *Definición de Negación:* $\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$

Teorema 2 *Doble negación:* $\neg\neg P \equiv P$

Teorema 3 *Equivalencia y negación:* $\neg P \equiv (P \equiv \mathit{False})$

1. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas del Cálculo Proposicional, es decir, son fórmulas *válidas* utilizando las propiedades del equivalente y la negación. Realizá la demostración justificando cada paso. Por ejemplo, demostramos el teorema $(p \equiv \neg p) \equiv False$:

$\underline{(p \equiv \neg p)} \equiv \mathit{False}$
$\equiv$ { Conmutatividad del equivalente }
$\underline{(\neg p \equiv p) \equiv \mathit{False}}$
$\equiv$ { Asociatividad del equivalente }
$\underline{\neg p \equiv (p \equiv \mathit{False})}$
$\equiv$ { Equivalencia y negación }
True

a) $\neg \mathit{False} \equiv \mathit{True}$
b) $r \equiv s \wedge t \equiv s \wedge t \equiv r$
c) $\neg p \equiv q \equiv p \equiv \neg q$

2. Decidí si son válidas o no las siguientes fórmulas. Justificá apropiadamente con una demostración o un contraejemplo.

   a) $p \equiv p \equiv p \equiv \mathit{True}$
   b) $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$
   c) $\neg p \equiv \mathit{False}$

Propiedades de la Disyunción

Axioma 6 *Distributividad disyunción con equivalencia:* $P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$

Axioma 7 *Asociatividad disyunción:* $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

Axioma 8 *Conmutatividad disyunción:* $P \vee Q \equiv Q \vee P$

Axioma 9 *Idempotencia disyunción:* $P \vee P \equiv P$

Axioma 10 *Tercero excluido:* $P \vee \neg P$

Teorema 4 *Elemento absorbente de la disyunción:* $P \vee \mathit{True} \equiv \mathit{True}$

Teorema 5 *Elemento neutro de la disyunción:* $P \vee \mathit{False} \equiv P$

3. Demostrá los siguientes teoremas de la disyunción utilizando las propiedades de la equivalencia y la negación, y sólo los axiomas de la disyunción. Justificá en cada cada paso con el axioma o teorema aplicado.

   a) *Elemento absorbente de la disyunción*: $p \vee \mathit{True} \equiv \mathit{True}$

   Ayuda: Podés comenzar la demostración de la siguiente manera

   $p \vee \mathit{True} \equiv \mathit{True}$
   $\equiv$ { Reflexividad de la equivalencia }
   $p \vee (p \equiv p) \equiv \mathit{True}$
   $\equiv$ { Distributividad de disyunción con equivalencia }
   ....

   b) *Elemento neutro de la disyunción*: $p \vee \mathit{False} \equiv p$

   Ayuda: Podés comenzar la demostración de la siguiente manera

   $p \vee \mathit{False} \equiv p$
   $\equiv$ { Definición de False }
   $p \vee \neg \mathit{True} \equiv p$
   $\equiv$ { Reflexividad de la equivalencia }
   $p \vee \neg(p \equiv p) \equiv p$
   $\equiv$ { Definición de negación }
   ....

c) *Teorema Estrella* : $p \vee q \equiv p \vee \neg q \equiv p$
Ayuda: Podés utilizar la distributividad del $\vee$ con el $\equiv$.

Propiedades de la Conjunción

Axioma 11 *Regla dorada:* $P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$

4. Demostrá los siguientes teoremas de la conjunción utilizando las propiedades de la equivalencia, la negación y la disyunción y el axioma llamado regla dorada. Justificá en cada cada paso con el axioma o teorema aplicado.

   a) *Idempotencia de la conjunción*: $p \wedge p \equiv p$
   b) *Elemento absorbente de la conjunción*: $p \wedge \mathit{False} \equiv \mathit{False}$
   c) *Elemento neutro de la conjunción*: $p \wedge \mathit{True} \equiv p$

Teorema 6 *Asociatividad de la conjunción:* $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$

Teorema 7 *Conmutatividad de la conjunción:* $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

Teorema 8 *Idempotencia de la conjunción:* $P \wedge P \equiv P$

Teorema 9 *Neutro de la conjunción:* $P \wedge \mathit{True} \equiv P$

Teorema 10 *Elemento absorbente de la conjunción:* $P \wedge \mathit{False} \equiv \mathit{False}$

Teorema 11 *Contradicción:* $P \wedge \neg P \equiv \mathit{False}$

5. Decidí si las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En todos los casos justificá con una demostración o un contraejemplo, según corresponda.

   a) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r)$
   b) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv p$

Propiedades de la Disyunción con la Conjunción

6. Demostrá los siguientes teoremas de la disyunción con la conjunción utilizando las propiedades de la equivalencia, la negación, la disyunción y la conjunción vistos anteriormente. Justificá en cada cada paso con el axioma o teorema aplicado.

   a) *Ley de absorción*: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
   b) *Ley de absorción (bis)*: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
   c) *Distributividad de la disyunción con la conjunción*: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   d) *De Morgan para la disyunción*: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
   e) *De Morgan para la conjunción*: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg p$

Teorema 12 *De Morgan para la disyunción:* $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

Teorema 13 *De Morgan para la conjunción:* $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

Teorema 14 *Distributividad de la disyunción con la conjunción:* $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Teorema 15 *Distributividad de la conjunción con la disyunción:* $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Teorema 16 *Ley de absorción:* $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$

Teorema 17 *Ley de absorción (bis):* $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$

Implicación

La implicación es uno de los mecanismos más intuitivos para razonar, ya que de esta forma representamos la **causalidad**. *De la misma forma que la causalidad no es simétrica, tampoco lo es la implicación. Es decir, los dos elementos que componen una implicación no participan de igual forma en la relación. Por ejemplo, cuando como demasiado (causa) me duele la panza (efecto), pero no a la inversa (cuando me duele la panza no necesariamente es porque he comido demasiado, puede ser porque estoy nervioso). El elemento a la izquierda de la implicación se llama* **antecedente**, *y el de la derecha,* **consecuente**. *Esta asimetría también se pone de manifiesto en la tabla de verdad de la implicación:*

p	q	$p \Rightarrow q$
True	*True*	*True*
True	*False*	*False*
False	*True*	*True*
False	*False*	*True*

También las diferentes formas de reescribir la implicación nos muestran como sus dos elementos participan de forma distinta en la relación.

Axioma 12 *Definición de implicación:* $P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$

7. Demuestre los siguientes teoremas de la implicación que se detallan a partir de las propiedades de los operadores ya conocidos y la definición de implicación.

   a) *Caracterización de implicación*: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

   b) *Definición dual de implicación*: $p \Rightarrow q \equiv p \wedge q \equiv p$

   c) *Absurdo*: $p \equiv (\neg p \Rightarrow \mathit{False})$.

   d) *Debilitamiento para* $\vee$: $p \Rightarrow p \vee q$.

Teorema 18 *Definición dual de implicación:* $P \Rightarrow Q \equiv P \wedge Q \equiv P$

Teorema 19 *Caracterización de implicación:* $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

8. Demuestre los siguientes teoremas de la implicación que se detallan a partir de las propiedades de los operadores ya conocidos.

   a) *Debilitamiento para* $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$.

   b) *Modus Ponens* $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$.

   c) *Modus Tollens* $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \equiv \neg p \wedge \neg q$.

   d) *Contrarrecíproca* $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

   Ayuda: Utilizar caracterización de la implicación para demostrar los últimos ejercicios.

Formalización de razonamientos

Una tarea muy importante en el desarrollo de software es el modelado de problemas. *Cuando nos encontramos con un problema a resolver la primera tarea que se plantea es cómo expresar este problema ordenadamente para trabajar con rigor en su solución. En el tipo de ejercicio mencionado arriba se trabaja formalizando razonamientos lógicos sobre el cálculo proposicional. La idea principal consiste en modelar oraciones del lenguaje natural en términos proposicionales.*

$\neg$	*“No –”, “Es falso que –”, “No es el caso que –”, etc.*
$\wedge$	*“– y –”, “–, pero –”, “–, sin embargo –”,*
$\vee$	*“– o –”, “– o – o ambos –”.*
$\Rightarrow$	*“[Si] – entonces –”, “– luego –”, “–. Como consecuencia, –”*
$\equiv$	*“– si y sólo si –”, “Son equivalentes – y –”.*
$\not\equiv$	*“O bien – o –”.*

9. Formalizá los siguientes razonamientos en la lógica proposicional. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En todos los casos justificá con una demostración, o un contraejemplo, según corresponda. Ejemplo:

   Enunciado: Si el gobernador quiere mejorar su imagen, o mejora su política social o gasta más en publicidad. El gobernador no mejora su política social. Luego, si el gobernador quiere mejorar su imagen, entonces deberá gastar más en publicidad.

   Solución: Si utilizamos las siguientes variables proposicionales para las proposiciones atómicas que aparecen en el razonamiento:

   $$i \doteq \text{el gobernador quiere mejorar su imagen}$$
   $$s \doteq \text{el gobernador mejora su política social}$$
   $$p \doteq \text{el gobernador gasta más en publicidad}$$

   podemos especificar la primera oración con la fórmula $i \Rightarrow s \vee p$, la segunda con $\neg s$, y la tercera con $i \Rightarrow p$. La primera y segunda oraciones son las *hipótesis del razonamiento*, y la final la *conclusión*. Un razonamiento de este tipo es correcto cuando la conjunción de las hipótesis $P_1, P_2, \ldots, P_n$ implica la conclusión C, es decir cuando la siguiente fórmula es válida:

   $$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$$

   En nuestro ejemplo, el razonamiento completo se puede formalizar como:

   $$(i \Rightarrow s \vee p) \wedge \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p)$$

   Este razonamiento válido y su validez puede ser demostrada.

   a) Soy fea, sucia y mala. Por lo tanto soy mala.
   b) Soy fea, sucia o mala. Por lo tanto soy mala.
   c) El círculo está pintado de rojo, azul o amarillo. Por lo tanto está pintado de amarillo.
   d) Llueve. Por lo tanto llueve y hace frío.
   e) Llueve. Por lo tanto llueve o hace frío.

Modus Ponens $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$ **y Modus Tollens** $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \equiv \neg p \wedge \neg q$

Tal vez es más común encontrar los teoremas de Modus ponens y Modus Tollens en su forma $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ *y* $\neg q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$*. Éstos nos permiten eliminar el símbolo de implicación si se cumple el antecedente, en el caso del Modus Ponens, y si el consecuente es falso, en el caso del Modus Tollens.*

La versión de Modus Ponens con implicación, de alguna manera modela una forma de razonamiento muy utilizado en el lenguaje natural. Por un lado tenemos que "si vale p *entonces vale* q*", es decir, en el caso de que el antecedente sea cierto puedo concluir que el consecuente es cierto. Por otro lado, tenemos que "vale* p*", es decir, tengo información de que el antecedente es cierto. Por lo tanto, "vale* q*", es decir, puedo concluir que el consecuente es cierto.*

De manera similar, el Modus Tollens con implicación, expresa que "si vale p *entonces vale* q*", pero como sé que* q *no es cierto, entonces no puede ser posible de que valga* p*. En otras palabras, si* p *fuera cierto, puedo concluir que* q *también es cierto a causa de la implicación. Pero eso no puede ser posible porque* q *no es cierto. Por lo tanto* p *es falso, o lo que es lo mismo,* $\neg p$ *es verdadero.*

La versión con equivalente de ambos teoremas puede ser más conveniente en algunos casos, cuando trabajamos en nuestro cálculo ecuacional, ya que no nos obliga a debilitar las expresiones.

10. Escribí dos razonamientos en lenguaje natural cuyos modelos se representen con Modus Ponens y Modus Tollens con implicación.

11. Modelá los siguientes razonamientos y demostrá que son correctos.

   a) Los martes y viernes tengo Matemática y Lógica. Hoy es martes; por lo tanto tengo Matemática y Lógica.
   b) Si el gobernador quiere mejorar su imagen entonces mejora su política social. El gobernador no mejora su política social por lo tanto no quiere mejorar su imagen.