Matemática y Lógica 2019

Guía 5: Conjuntos

Docente: Araceli Acosta

Cualquier colección de objetos o individuos se denomina conjunto. En el contexto de la matemática, el término conjunto no tiene una definición sino que es un concepto primitivo. Ejemplos de conjuntos son el conjunto de los números naturales, de los televisores de la ciudad de Córdoba y de los peces en los océanos. Nuestro objetivo será estudiar aquellos conjuntos que están relacionados con el campo de la matemática, especialmente los conjuntos numéricos. La teoría de conjuntos es fundamental en matemática y de suma importancia en informática, donde encuentra aplicaciones en áreas tales como inteligencia artificial, bases de datos y lenguajes de programación.

Un conjunto está integrado por objetos y los objetos que integran el conjunto se llaman elementos de ese conjunto. Un conjunto sin elementos se denomina *conjunto vacío* y se denota con el símbolo $\emptyset$. En general usaremos letras mayúsculas para designar a los conjuntos y letras minúsculas para designar a sus elementos. Si a es un elemento de un conjunto A se escribe $a \in A$ y se lee *a pertenece* a A o a es un elemento de A. Si a no es un elemento del conjunto A se escribe $a \notin A$ y se lee *a no pertenece* a A o a no es elemento de A. Por ejemplo el conjunto vacío se puede definir en términos de la operación pertenece de la siguiente manera:

$$x \in \emptyset \equiv \mathit{False}$$

Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ servirán para denotar a los siguientes conjuntos:

- $\mathbb{N}$: el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{Z}$: el conjunto de los números enteros.
- $\mathbb{Q}$: el conjunto de los números racionales.
- $\mathbb{R}$: el conjunto de los números reales.

1. Defina por extensión los siguientes conjuntos

   a) $\{x|x \in \mathbb{Z} \wedge -3 < x < 4\}$
   b) $\{x|x \in \mathbb{Z} \wedge x \geqslant 0 \wedge x \text{ es múltiplo de } 3\}$
   c) $\{x|(3 * x - 1) * (x + 2) = 0\}$
   d) $\{x|c \in \mathbb{Z} \wedge 2 * x \geqslant 0\}$
   e) $\{n|n \in \mathbb{N} \wedge n^2 = 9\}$
   f) $\{2^n|n \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant 5\}$

2. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-2, 0, 2\}$, $C = \{10\}$

   a) $\{x|x \in A \wedge x \in B\}$
   b) $\{x|x \in A \vee x \in B\}$
   c) $\{a * c|a \in A \wedge c \in C\}$
   d) $\{a * b|a \in A \wedge b \in B\}$
   e) $\{(x, y)|x \in A \wedge y \in B\}$

Operaciones de conjuntos

La unión de dos conjuntos A y B da como resultado un nuevo conjunto que contiene todos los elementos de ambos conjuntos y se denota $A \cup B$. Es decir $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ en símbolos esta definición se puede escribir de la siguiente manera:

$$x \in A \cup B \equiv x \in A \vee x \in B$$

La intersección de dos conjuntos A y B da como resultado un nuevo conjunto que contiene sólo los elementos que comparten ambos conjuntos y se denota $A \cup B$. Es decir $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ en símbolos esta definición se puede escribir de la siguiente manera:

$$x \in A \cap B \equiv x \in A \wedge x \in B$$

La diferencia de dos conjuntos A y B da como resultado un nuevo conjunto que contiene todos los elementos de A que no están en B y se denota $A - B$.Es decir $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ en símbolos esta definición se puede escribir de la siguiente manera:

$$x \in A - B \equiv x \in A \wedge x \notin B$$

El complemento de un conjunto A es el conjunto de todos los elementos del dominio, es decir, del conjunto universal de referencia, que no pertencen al conjunto A. A este conjunto lo denotamos A' o A^c. Es decir, $A' = \{x \mid x \notin A\}$ en símbolos esta definición se puede escribir de la siguiente manera:

$$x \in A' \equiv a \notin A$$

Partes de un conjunto A es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Es decir, $\mathcal{P}(A) = \{s \mid s \subseteq A\}$ en símbolos esta definición se puede escribir de la siguiente manera:

$$s \in \mathcal{P}(A) \equiv s \subseteq A$$

El producto cartesiando de dos conjuntos A y B es el conjunto de pares ordenados, con el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertence a B, y se denota $A \times B$. Es decir, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ en símbolos esta definición se puede escribir de la siguiente manera:

$$(a, b) \in A \times B \equiv a \in A \wedge b \in B$$

3. Dados $A = \{1, ..., 100\}$, $B = \{0\}$, $C = \{1, ..., 10\}$ y $D = \{2, 3, 5, 7\}$ definir por extensión
   a) $C \times D$
   b) $A \cap C$
   c) $B \cup D$
   d) $C \cup D$
   e) $C - D$
   f) $C \cap D$
   g) $C \cap \emptyset$
   h) $\{x | x \in A \wedge x \text{ es par}\}$
   i) $\mathcal{P}(D) \cap \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}$
   j) $\{x * 3 | x \in C\}$
   k) $\{x + 2 | x \in D\} \cap C$

4. Dados los conjuntos definidos en el ejercicio anterior, calcular el cardinal
   a) $|A \times D|$
   b) $|A \cup C|$
   c) $|A \cap B|$
   d) $\mathcal{P}(A)$
   e) $|A \cap \emptyset|$
   f) $|C \cup B|$
   g) $\mathcal{P}(D)$

Pruebas

Una relación entre conjuntos, más elemental que pertenece, es la igualad. *La igualdad de dos conjuntos A y B se denota $A = B$. Dos conjuntos son* iguales *si y sólo sí tienen los mismos elementos. En símbolos esta definición se puede escribir de la siguiente manera:*

$$A = B \equiv x \in A \equiv x \in B$$

Decimos que un conjunto A está incluido en B, ($A \subseteq B$) si todo elemento que pertenece a A también pertenece a B.

en símbolos esta definición se puede escribir de la siguiente manera:

$$A \subseteq B \equiv x \in A \Rightarrow x \in B$$

5. Demuestre las siguientes propiedades de conjuntos

   a) Idempotencia de la unión:
   $$A \cup A \equiv A$$

   b) Elemento Neutro de la union:
   $$A \cup \emptyset \equiv A$$

   c) Elemento Absorbente de la union:
   $$A \cup \mathcal{U} \equiv \mathcal{U}$$

   d) Idempotencia de la intersección:
   $$A \cap A \equiv A$$

   e) Elemento Neutro de la intersección:
   $$A \cap \mathcal{U} \equiv A$$

   f) Elemento Absorbente de la intersección:
   $$A \cap \emptyset \equiv \emptyset$$

   g) De Morgan:

   - $$(A \cup B)' \equiv A' \cap B'$$
   - $$(A \cap B)' \equiv A' \cup B'$$

6. Demuestre los siguientes teoremas

   a) $A \cap A' = \emptyset$

   b) $A - B \equiv A - (A \cap B)$

   c) $(A - B) \cup (B - A) \equiv (A \cup B) - (A \cap B)$