Matemática y Lógica - 2019

Guía de estudio 3: Inducción Matemática

Docente: Araceli Acosta

Inducción

Una técnica poderosa para demostrar propiedades sobre un dominio inductivo, como son los naturales o las listas, es usar el **principio de inducción**. *La idea que rige este principio consiste en demostrar dos cosas. Por un lado verificar que la propiedad se satisface para los elementos "más chicos" del dominio (por ejemplo, la lista* $[\,]$*). Por otro lado demostrar para un elemento arbitrario del dominio (por ejemplo, la lista* $x \triangleright xs$*) que si suponemos que la propiedad es cierta para todos los elementos más chicos que él (por ejemplo* xs*), entonces la propiedad también es satisfecha por ese elemento. Dado que todo elemento de un dominio inductivo puede ser "construido" a partir de elementos más simples, este procedimiento demuestra que la propiedad es satisfecha por todos los elementos del dominio, y por lo tanto es válida.*

En símbolos, podríamos describir los casos que hay que demostrar de la siguiente manera:

- *Si queremos demostrar la propiedad* $P.n$ *es válida, es decir, es verdadera para todos los* n *naturales, tenemos que demostrar*
  1. *(CASO BASE)* $P.0$
  2. *(CASO INDUCTIVO)* $P.k \Rightarrow P.(k+1)$
- *Si queremos demostrar la propiedad* $P.xs$ *es válida, es decir, es verdadera para todos las listas* xs *cualquiera sean los elementos que ésta tenga, tenemos que demostrar*
  1. *(CASO BASE)* $P.[\,]$
  2. *(CASO INDUCTIVO)* $P.ks \Rightarrow P.(z \triangleright ks)$

Muchas veces a la hora de realizar una demostración es importante tener presente las definiciones y propiedades (axiomas y teoremas) de los operadores que están involucrados en el teorema que queremos demostrar. En ese sentido es recomendable considerar los siguiente pasos.

1. *Identificar la fórmula a demostrar.*
2. *Recordar la definición de todos los operadores y funciones que aparecen en la fórmula.*
3. *Decidir sobre qué variable se hará inducción.*
4. *Demostrar el CASO BASE que se obtiene al reemplazar la variable sobre la que hacemos inducción con el primer elemento del conjunto. Por ejemplo "0" para los naturales o "*$[\,]$*" para las listas.*
5. *Identificar la HIPÓTESIS INDUCTIVA que se obtiene al reemplazar la variable sobre la que hacemos inducción por otra variable que represente un valor arbitrario del conjunto. Por ejemplo "*k*" para los naturales o "*ks*" para las listas.*
6. *Demostrar el CASO INDUCTIVO que se obtiene al reemplazar la variable por una expresión que represente el sucesor de la variable que elegimos para la hipótesis inductiva. Por ejemplo "*$k+1$*" para los naturales o "*$k \triangleright ks$*" para las listas.*

1. Considerando las definiciones de los ejercicios del práctico anterior demostrá por inducción sobre xs las siguientes propiedades:

   a) $sum.(sumar1.xs) = sum.xs + \#xs$

   b) $sum.(duplica.xs) = 2 * sum.xs$

   c) $\#(duplica.xs) = \#xs$

   d) $duplica.(duplica.xs) = cuadruplica.xs$

2. Considerando las definiciones dadas en cada caso, demostrá por inducción sobre n las siguientes propiedades:

   a) $f.n = 2 * n$, donde $$\begin{array}{rcl} f.0 & \doteq & 0 \\ f.(n+1) & \doteq & 2 + f.n \end{array}$$

   b) $g.n = n$, donde $$\begin{array}{rcl} g.0 & \doteq & 0 \\ g.(n+1) & \doteq & 1 + g.n \end{array}$$

   c) $sumatoria.n = n * (n+1)/2$, donde $$\begin{array}{rcl} sumatoria.0 & \doteq & 0 \\ sumatoria.n & \doteq & n + sumatoria.(n-1) \end{array}$$

3. Considerando el operador $+\!\!+ : [A] \to [A] \to [A]$, que concatena dos listas y definida recursivamente como:

$$\begin{array}{rcl} [\,] +\!\!+ ys & \doteq & ys \\ (x \triangleright xs) +\!\!+ ys & \doteq & x \triangleright (xs +\!\!+ ys) \end{array}$$

   demostrá las siguientes propiedades

   a) $sum.(xs +\!\!+ ys) = sum.xs + sum.ys$

   b) $duplica.(xs +\!\!+ ys) = (duplica.xs) +\!\!+ (duplica.ys)$

   c) $solopares.(xs +\!\!+ ys) = (solopares.xs) +\!\!+ (solopares.ys)$

4. Considerando la función $quitarCeros : [Num] \to [Num]$ definida de la siguiente manera

$$\begin{array}{lcll} quitarCeros.[\,] & \doteq & [\,] & \\ quitarCeros.(x \triangleright xs) & \doteq & (& x \neq 0 \to x \triangleright quitarCeros.xs \\ & & \Box & x = 0 \to quitarCeros.xs \\ & &) & \end{array}$$

   demostrá que

$$sum.(quitarCeros.xs) = sum.xs$$

   Ayuda: Tené en cuenta que como la función *quitarCeros* se define por casos, el caso inductivo también deberá dividirse en dos casos.

5. Considerando la función $repetir : Nat \to Num \to [Num]$, que construye una lista de un mismo número repetido cierta cantidad de veces, definida recursivamente como:

$$\begin{array}{rcl} repetir,0.x & \doteq & [\ ] \\ repetir.(n+1).x & \doteq & x \triangleright repetir.n.x \end{array}$$

   demostrá que $\#repetir.n.x = n$.